Le calcul exact des tempéraments mésotoniques.

Application au frettage d'un luth et à son accordage par le calcul des écarts par rapport à la gamme tempérée.

1. La gamme naturelle:

Elle est expliquée par la théorie de Fourier : chaque signal périodique (à de rares exceptions près), de fréquence f_0, est décomposable en une infinité de signaux sinusoïdaux (les harmoniques) dont les fréquences sont des multiples entiers de f_0 soit $2f_0, 3f_0, 4f_0, 5f_0, \ldots, nf_0, \ldots$

Concrètement, lorsqu'une corde est mise en vibration, le son produit contient :

- le *signal fondamental* de fréquence f_0 ;
- le premier harmonique de fréquence $2f_0$: on entend l'*octave du signal fondamental* ;
- le deuxième harmonique de fréquence $3f_0 = 2\times\left(\frac{3}{2}f_0\right)$: on entend la *quinte du signal fondamental transposée à l'octave supérieure*; (donc, puisque l'octave supérieure s'obtient par doublement de la fréquence, il en résulte que la quinte du signal fondamental a pour fréquence $\frac{3}{2}f_0$)
- le troisième harmonique de fréquence $4f_0 = 2\times(2f_0)$: c'est l'octave du premier harmonique (ou deux octaves au dessus du signal fondamental) ;
- le quatrième harmonique de fréquence $5f_0 = 2\times 2\times\left(\frac{5}{4}f_0\right)$: on entend une tierce majeure deux octaves au dessus du fondamental (il en résulte que la tierce majeure a pour fréquence $\frac{5}{4}f_0$).

On pourrait continuer à l'infini mais d'une part il est difficile d'entendre des harmoniques éloignés (leur fréquence devient inaudible à notre oreille et leur intensité sonore, qui dépend du son émis, devient rapidement très faible) et, d'autre part, les résultats déjà obtenus suffisent à construire une théorie.

Je résume les seules lois à mémoriser:

- *l'octave s'obtient en doublant la fréquence ;*
- *la quinte s'obtient en multipliant la fréquence de référence par* $\frac{3}{2}$ *;*
- *la tierce majeure s'obtient en multipliant la fréquence de référence par* $\frac{5}{4}$.

Je précise que la richesse d'un son est liée à l'intensité des harmoniques (les accords consonnants associent des sons qui renforcent des harmoniques communs). Par exemple, tout luthiste sait bien l'intérêt d'associer à une basse une corde réglée à l'octave supérieure.

2. Le comma syntonique:

Examinons l'empilement de 4 quintes consécutives. Par exemple:

$$do_1 \underset{q}{-} sol_2 - sol_3 \underset{q}{-} ré_4 - ré_5 \underset{q}{-} la_6 - la_7 \underset{q}{-} mi_8 .$$

Cet empilement produit une tierce majeure deux octaves au dessus de la note de référence.

Si f_0 est la fréquence de la note de référence (do_3 dans l'exemple choisi), la fréquence du mi_5 peut être calculée de deux façons différentes:

- première méthode: la tierce majeure mi_3 a pour fréquence $\frac{5}{4} f_0$ et puisqu'il faut monter de 2 octaves pour obtenir mi_5, sa fréquence calculée est $2 \times 2 \times \frac{5}{4} f_0 = 5 f_0$; •
- deuxième méthode: la quinte a pour fréquence $\frac{3}{2} f_0$ et on en emplile 4; la fréquence calculée est donc $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} f_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \times f_0 = \frac{81}{16} f_0$. ,

Il y a donc un sérieux problème: l'empilement de 4 quintes naturelles ne produit pas une tierce majeure naturelle puisque $\frac{81}{16} \neq 5$. Notre oreille fait d'ailleurs une nette différence entre les deux sons.

L'écart entre ces deux fréquences, exprimé en rapport est appelé comma syntonique. Sa valeur est donc :

$$\frac{\frac{81}{16}}{5} = \frac{81}{80} = 1{,}0125 .$$

On remarque qu'une gamme construite à partir des quintes ne respecte pas les rapports naturels des intervalles remarquables (pas même l'octave : 12 quintes naturelles successives formées à partir de do donnent un $si_\#$ qui diffère du do le plus proche d'un comma pythagoricien). Une telle gamme sonne donc très faux et il est nécessaire de la tempérer pour obtenir une justesse acceptable.

3. Le tempérament mésotonique au $\frac{1}{4}$ de comma syntonique:

Puisque les quintes ne peuvent être respectées (du moins si on souhaite conserver les octaves naturelles), on tente de privilégier les intervalles confortant un maximum d'harmoniques. Le choix s'est porté, au XVI° siècle, sur le respect d'un maximum de tierces majeures naturelles.

Le rapport, tempéré, de la quinte est donc le nombre q tel que $q^4 = 5$ (cf. •) soit:

$\boxed{q = \sqrt[4]{5} \approx 1{,}495349}$ (au lieu de $\frac{3}{2} = 1{,}5$ pour la quinte naturelle)

Ce nombre est la clef des calculs des fréquences de toutes les notes en tempérament mésotonique.

Exemple: Soit la base $la_3 = 440 Hz$. Calculer les fréquences de mi_4, si_3, $fa_{\#3}$ et sol_{b3}.

Solutions:

- on passe de la_3 à mi_4 par une quinte; la fréquence de mi_4 est donc:
  $q \times f_0 = \sqrt[4]{5} \times 440 \approx 657{,}95 Hz$;
- on passe de la_3 à si_4 par deux quintes consécutives (la-mi, mi-si); la fréquence de si_4 est donc $q \times q \times f_0 = q^2 \times f_0$; puisque monter d'une octave revient à doubler la fréquence, celle de si_3 est la moitié de celle de si_4 soit:
  $\frac{q^2}{2} \times f_0 \approx 491{,}93 Hz$;

§ on passe de la_3 à $fa_{\#5}$ par trois quintes consécutives; la fréquence de $fa_{\#5}$ est donc $q^3 \times f_0$; il faut descendre ensuite de deux octaves pour passer de $fa_{\#5}$ à $fa_{\#3}$, autrement dit, diviser la fréquence par $2 \times 2 = 2^2$; la fréquence de $fa_{\#3}$ est donc:
$\frac{q^3}{2^2} \times f_0 \approx 367{,}81 Hz$;

§ on passe de la_3 à sol_{b3} en descendant de 9 quintes et en remontant de 5 octaves (avec un crayon à la main, on y arrive très bien !); lorsqu'on descend de 9 quintes la fréquence est alors divisée par q^9 et lorsqu'on monte de 5 octaves elle est multipliée par 2^5 ; la fréquence du sol_{b3} est donc :
$\frac{2^5}{q^9} \times f_0 \approx 376{,}63 Hz$.

Vous remarquerez, au passage, l'écart extrêmement sensible des fréquences du sol_b et du $fa_\#$ (d'où l'intérêt, sur un luth en sol, de placer une petite frette permettant de réaliser un $fa_\#$ et, tant qu'on y est, un $do_\#$; c'est tellement utile pour les musiques de la Renaissance!).

Vous avez certainement compris la façon d'obtenir les fréquences exactes de toutes les notes dans ce tempérament mais rassurez-vous, je ne suis pas un monstre: vous trouverez plus loin un tableau donnant les expressions exactes qui vous intéressent!

4. Le tempérament mésotonique au $\frac{1}{5}$ de comma syntonique:

Ce tempérament, moins typé que le précédent, apparaît historiquement au XVII° siècle (Sauveur). Il permet de réduire l'écart à la quinte naturelle en répartissant aussi le comma syntonique sur la tierce majeure qui n'est donc plus naturelle. Le comma est alors réparti sur cinq quintes consécutives.

Chaque quinte est alors tempérée au $\frac{1}{5}$ de comma syntonique qui correspond au nombre $\sqrt[5]{\frac{81}{80}}$ et on obtient la quinte tempérée en diminuant la quinte naturelle, de rapport $\frac{3}{2}$, de $\frac{1}{5}$ de comma soit un rapport de quinte tempérée $q = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt[5]{\frac{81}{80}}}$ ou $\boxed{q = \sqrt[5]{\frac{15}{2}} \approx 1{,}496278}$.

La méthode de calcul des fréquences exactes des notes ainsi tempérées est identique à celle utilisée pour le tempérament précédent: il suffit de remplacer q par sa nouvelle valeur.

Par exemple, pour $fa_{\#3}$ on obtient une fréquence $\frac{q^3}{2^2} \times f_0 \approx 368{,}49 Hz$ et pour sol_{b3} une fréquence $\frac{2^5}{q^9} \times f_0 \approx 374{,}53 Hz$. L'écart est nettement atténué par rapport au tempérament au $\frac{1}{4}$ de comma.

5. Les autres tempéraments mésotoniques:

Vous pouvez répartir le comma syntonique sur 6, 7, 8, 9 quintes consécutives. Vous obtiendrez ainsi des tempéraments de plus en plus adoucis au $\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \ldots$ de comma syntonique.

Le principe de calcul est le même. Si vous voulez vous amuser …

6. Le frettage de l'instrument:

Principe: ***la fréquence vibratoire d'une corde est inversement proportionnelle à sa longueur L.***

Pour multiplier la fréquence par un nombre *k*, il suffit donc de raccoucir la longueur vibrante de la corde pour que celle-ci devienne $\frac{L}{k}$.

La partie vibrante est en fait raccourcie de *la distance d qui sépare la frette du sillet*.

On en déduit $d = L - \frac{L}{k}$ soit $\boxed{d = L\left(1 - \frac{1}{k}\right)}$.

Application: Le tableau suivant donne les possibilités de frettage d'un instrument (valeurs numériques choisies pour mon luth renaissance dont une corde à vide de longueur vibrante $L = 63\ cm$ donne un la de fréquence $f_0 = 440\ Hz$; vous pouvez, bien sûr, remplacer f_0 et L par toutes autres valeurs).

Frette n°	note	Fréquence de la note	Exemple au $\frac{1}{4}$ de comma	Exemple au $\frac{1}{5}$ de comma	Distance frette-sillet	Exemple au $\frac{1}{4}$ de comma	Exemple au $\frac{1}{5}$ de comma
I.a.	la#	$f_0 \times \frac{q^7}{2^4}$	459,76 *Hz*	461,76 *Hz*	$L\left(1 - \frac{2^4}{q^7}\right)$	2,71 *cm*	2,97 *cm*
I.b.	si$_b$	$f_0 \times \frac{2^3}{q^5}$	470,79 *Hz*	469,33 *Hz*	$L\left(1 - \frac{q^5}{2^3}\right)$	4,12 *cm*	3,94 *cm*
II.	si	$f_0 \times \frac{q^2}{2}$	491,93 *Hz*	492,55 *Hz*	$L\left(1 - \frac{2}{q^2}\right)$	6,65 *cm*	6,72 *cm*
III.	do	$f_0 \times \frac{2^2}{q^3}$	526,36 *Hz*	525,38 *Hz*	$L\left(1 - \frac{q^3}{2^2}\right)$	10,34 *cm*	10,24 *cm*
IV.a.	do#	$f_0 \times \frac{q^4}{2^2}$	550,00 *Hz*	551,37 *Hz*	$L\left(1 - \frac{2^2}{q^4}\right)$	12,60 *cm*	12,73 *cm*
IV.b.	ré$_b$	$f_0 \times \frac{2^5}{q^8}$	563,20 *Hz*	560,41 *Hz*	$L\left(1 - \frac{q^8}{2^5}\right)$	13,78 *cm*	13,54 *cm*
V.	ré	$f_0 \times \frac{2}{q}$	588,49 *Hz*	588,13 *Hz*	$L\left(1 - \frac{q}{2}\right)$	15,90 *cm*	15,87 *cm*
VI.a.	ré#	$f_0 \times \frac{q^6}{2^3}$	614,92 *Hz*	617,21 *Hz*	$L\left(1 - \frac{2^3}{q^6}\right)$	17,92 *cm*	18,09 *cm*
VI.b.	mi$_b$	$f_0 \times \frac{2^4}{q^6}$	629,68 *Hz*	627,33 *Hz*	$L\left(1 - \frac{q^6}{2^4}\right)$	18,98 *cm*	18,81 *cm*
VII.	mi	$f_0 \times q$	657,95 *Hz*	658,36 *Hz*	$L\left(1 - \frac{1}{q}\right)$	20,87 *cm*	20,90 *cm*

VIII.	fa	$f_0 \times \frac{2^3}{q^4}$	704,00 *Hz*	702,25 *Hz*	$L\left(1-\frac{q^4}{2^3}\right)$	23,625 *cm*	23,53 *cm*
IX.a.	$fa_{\#}$	$f_0 \times \frac{q^3}{2}$	735,61 *Hz*	736,99 *Hz*	$L\left(1-\frac{2}{q^3}\right)$	25,32 *cm*	25,39 *cm*
IX.b.	sol_b	$f_0 \times \frac{2^6}{q^9}$	753,27 *Hz*	749,07 *Hz*	$L\left(1-\frac{q^9}{2^6}\right)$	26,20 *cm*	25,99 *cm*
X.	sol	$f_0 \times \left(\frac{2}{q}\right)^2$	787,10 *Hz*	786,12 *Hz*	$L\left(1-\frac{q^2}{2^2}\right)$	27,78 *cm*	27,74 *cm*
XI.a.	$sol_{\#}$	$f_0 \times \frac{q^5}{2^2}$	822,44 *Hz*	825,00 *Hz*	$L\left(1-\frac{2^2}{q^5}\right)$	29,30 *cm*	29,40 *cm*
XI.b.	la_b	$f_0 \times \frac{2^5}{q^7}$	842,18 *Hz*	838,53 *Hz*	$L\left(1-\frac{q^7}{2^5}\right)$	30,09 *cm*	29,94 *cm*
XII.	la	$2 f_0$	880,00 *Hz*	880,00 *Hz*	$\frac{L}{2}$	31,5 *cm*	31,5 *cm*

Remarques importantes:

- § Ce calcul théorique ne tient pas compte de la modification de longueur (et de tension) d'une corde lorsqu'on la plaque sur une frette. Il faut donc placer la frette un peu plus vers le sillet que ce qu'indique le calcul. Pour ma part, je place la partie arrière de la frette (dirigée vers le chevalet) environ à une épaisseur de frette de la position calculée.

- § Les indications a. et b. à la suite d'un numéro de frette indiquent que celle-ci peut être placée dans les deux positions selon que l'on souhaite obtenir des dièses ou des bémols. Dans le cas de la frette I., on peut utiliser en permanence les deux positions en plaçant la grande frette sur la position b. et en collant une petite frette sur la position a. de sorte à obtenir, sur un luth en sol, un $fa_{\#}$ et un $do_{\#}$ (il faut bien reconnaître qu'à la Renaissance, sol_b ou $ré_b$ sont rarement utilisés!).

7. Calcul des écarts par rapport au tempérament égal:

Le tempérament égal est basé sur le partage en 12 demi-tons égaux de l'octave. Les fréquences des notes formant des demi-tons consécutifs sont donc les termes d'une suite géométrique dont la raison *r* vérifie $r^{12} = 2$ soit $\boxed{r = \sqrt[12]{2}}$.

Ce partage possède l'immense avantage de fonctionner de façon identique dans toutes les tonalités; malheureusement, il s'éloigne de tous les rapports naturels et de la richesse harmonique qui en découle. Si vous n'avez pas franchi le pas du mésotonique et que vous jouez encore en tempérament égal, préparez vous à un choc: vous risquez de ne pas reconnaître votre instrument lorsque vous vous déciderez à franchir (sans retour, c'est certain) ce cap décisif !

Définition du cent: ***Le cent est la centième partie du demi-ton du tempérament égal. Sa valeur est donc*** $\boxed{c = \sqrt[1200]{2}}$**.**

Calcul de l'écart en cents par rapport à la note correspondante en tempérament égal:

- On calcule le rapport k des fréquences de la note tempérée en mésotonique (ou tout type d'autres tempéraments) et de la note correspondante en tempérament égal. Par exemple, pour un do_4, il suffit de monter de trois demi-tons à partir du la de fréquence f_0; sa fréquence en tempérament égal est donc $f_0 \times \sqrt[12]{2^3} = f_0 \times \sqrt[4]{2}$. Sa fréquence en mésotonique étant $f_0 \times \frac{2^2}{q^3}$ on en déduit $k = \frac{f_0 \times \frac{2^2}{q^3}}{f_0 \times \sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt[4]{2^7}}{q^3}$.

- Le nombre de cents contenus dans le rapport k est donc le nombre n tel que $k = \left(\sqrt[1200]{2}\right)^n = 2^{\frac{n}{1200}}$. Donc, $\frac{n}{1200}\log 2 = \log k$ soit: $\boxed{n = 1200 \times \frac{\log k}{\log 2}}$.

On peut donc calculer les valeurs exactes de tous les écarts (voir applications numériques dans le tableau suivant). On remarque, de plus, que les écarts ne dépendent ni de l'octave ni de la fréquence de référence.

La connaissance de ces écarts permet d'accorder les cordes à vide avec un accordeur classique: il suffit de se décaler, par rapport à l'indication de l'accordeur à tempérament égal, du nombre de cents calculé. Je signale toutefois que les accordeurs multi-tempéraments sont désormais commercialisés à des tarifs abordables !

Tableau des écarts en cents par rapport au tempérament égal:

Notes	do	ré	mi	fa	sol	la	si
Mésotonique $\frac{1}{4}$	+10,26	+3,422	– 3,422	+13,69	+6,843	0	– 6,843
Mésotonique $\frac{1}{5}$	+7,039	+2,346	– 2,346	+9,385	+4,693	0	– 4,693
Notes		$ré_b$	mi_b		sol_b	la_b	si_b
Mésotonique $\frac{1}{4}$		+27,37	+20,53		+30,79	+23,95	+17,11
Mésotonique $\frac{1}{5}$		+18,77	+14,08		+21,12	+16,42	+11,73
Notes	$do_\#$	$ré_\#$		$fa_\#$	$sol_\#$	$la_\#$	
Mésotonique $\frac{1}{4}$	– 13,69	– 20,53		-10,26	-17,11	-23,95	
Mésotonique $\frac{1}{5}$	– 9,385	-14,08		-7,039	-11,73	-16,42	

8. Conclusion:

- Si vous m'avez lu jusqu'au bout, bravo, vous avez gagné le droit de reprendre le flambeau pour effectuer le même travail sur d'autres tempéraments!

- La richesse harmonique des accords produits en tempérament mésotonique (notamment au $\frac{1}{4}$ de comma, avec ses tierces naturelles) résulte du fait que, dans sa vibration, la corde émet un son dont la fréquence fondamentale varie dans une bande de fréquences relativement étroite. De ce fait, bien que les quintes ne soient pas exactement naturelles, lorsqu'on joue, par exemple, un accord parfait majeur, en cours de vibration la fondamentale va se trouver fréquemment associée à sa tierce et sa quinte naturelles: c'est la situation la plus riche que l'on puisse imaginer.

- Passez donc au mésotonique "vrai" ($\frac{1}{4}$): il vous apportera tellement de plaisirs. Sa mise en œuvre est simple et vous verrez que, pratiquement, on a peu souvent besoin de déplacer des frettes et la plupart d'entre elles restent fixes.

Bon plaisir musical !